রাসেলীয় গাণিতিক যুক্তিবিজ্ঞান ঃ একটি পর্যালোচনা

অমিত পান

সংক্ষিপ্তসার: গণিতের একাধিক মৌলিক প্রত্যয়ের মধ্যে বিভিন্ন প্রকারের অসঙ্গতি লক্ষ্য করা যাচ্ছিল সেই প্রাচীন যুগ থেকেই। Welerstrass (1815-1897), Dedekind (1831-1916) এবং Georg Cantor (1845-1918)- গণিতের অন্তর্নির্হিত অসঙ্গতিগুলি দূর করে গণিতকে বাস্তব সংখ্যা বিষয়ক তত্ত্বের উপর দাঁড় করান। উনবিংশ শতাব্দীর মধ্যভাগে গণিতের অন্তর্নির্হিত অসঙ্গতিগুলিকে দূর করা সম্ভব হলেও, গণিতের ভিত্তি সংক্রান্ত অনুসন্ধানের তাগিদ শুরু হয় উনবিংশ শতাব্দীর শেষ ভাগ থেকে শুরু করে বিংশ শতাব্দীর প্রথম অর্ধের মধ্যে। গণিতের ভিত্তি সুদৃঢ় করণের ক্ষেত্রে মূলত তিনটি ভিত্তিবাদী প্রস্থান (fundamental school) লক্ষ্য করা যায়, যার মধ্যে অন্যতম ছিল Russell এর যুক্তি-বৈজ্ঞানিকীকরণ তত্ত্ব বা Logicism, যার মূল বক্তব্য হল—গণিত মূলত যুক্তিবিজ্ঞানের একটি অংশ, গাণিতিক নিশ্চয়তার মূলেই আছে কতকগুলি মৌলিক যৌক্তিক সত্যের নিশ্চয়তা। Russell এর যুক্তি-বৈজ্ঞানিকীকরণ প্রকল্প সাকারায়ণের অন্যতম পর্যায় হল (1910-1913) এই দীর্ঘ তিনবছর সময় ধরে তিনটি পৃথক খণ্ডে লিখিত Principia Mathematica গ্রন্থটি। তিনটি পৃথক খণ্ডে লিখিত গ্রন্থটি Russell এবং তাঁর অভিন্ন শিক্ষকবন্ধু Whitehead যে ভাবে পর্যালোচনা করেছেন তাতে তিনটি পৃথক অংশ পরিলক্ষিত হয়, এই তিনটি পৃথক অংশ হল : ক) অবরোহণ তন্ত্র (System of Deduction), খ) যৌক্তিক পর্যায় তত্ত্ব (Theory of Logical Types) , গ) অসম্পূর্ণতার প্রতীক তত্ত্ব (Theory of Incomplete Symbols) Russell এবং Whitehead কৃত গণিতের যুক্তি-বৈজ্ঞানিকীকরণের কর্মসূচী কতটা সঙ্গতিপূর্ণ (Consistency) কতটা পূর্ণ (Complete) এবং কতটা বাস্তব তা নিয়ে প্রশ্ন তোলাই যায়, কিন্তু গণিত নিয়ে, গাণিতিক সংখ্যা নিয়ে, গাণিতিক সত্তার স্বরূপ নিয়ে—গাণিতিক যুক্তি-বৈজ্ঞানিকীকরণের এই আলোচনা বর্তমান শতাব্দীর সকল পাঠকের কাছে এক প্রেরণা, ভাবাবেগ। Peano এবং Frege এর হাত ধরে যে গাণিতিক যুক্তিবিজ্ঞানের আত্মপ্রকাশ ঘটেছিল তাকে আধুনিকতার যে সর্বোচ্চ শিখরে Russell এবং Whitehead পৌঁছে দিয়েছিলেন—তা অকল্পনীয় ছিল। আকারনিষ্ঠ মৌলবাক্য নির্ভর যৌক্তিক অবরোহণতন্ত্রের (formal axiomatic deductive systems) মাধ্যমে যুক্তিবিজ্ঞানকে উপস্থাপন করার যে ধরণ তার অনেকটাই Principia-র অবদান।

বীজশব্দ: যুক্তিবৈজ্ঞানিকীকরণ তত্ত্ব (Logicism), প্রাত্যয়িক পর্যাবসান (Conceptual Reduction), তাত্ত্বিক পর্যাবসান (Doctrinal Reduction), স্বতঃসিদ্ধমূলীকরণ তন্ত্র (Axiomatic System), আকারগত প্রসক্তি (Formal Implication), ব্যাপনামুখী যুক্তি (Extensional Logic), যৌক্তিক পর্যায় তত্ত্ব (Theory of Types), যৌক্তিক নিঃসৃতি (Logical Consequence)

গণিতের একাধিক মৌলিক প্রত্যয়ের মধ্যে বিভিন্ন প্রকারের অসঙ্গতি লক্ষ্য করা যাচ্ছিল সেই প্রাচীন যুগ থেকেই। অসীমতা (Infinity), নিরবচ্ছিন্নতা (Continuity)-ইত্যাদি প্রত্যয়গুলির কূটাভাস (paradox) সেই প্রাচীন কাল থেকেই সুবিদিত ছিল।[1] কিন্তু উনবিংশ শতকের মাঝামাঝি সময় থেকে গণিতের প্রভূত উন্নতির সঙ্গে সঙ্গে তার অন্তর্নির্হিত দ্বন্দ্বগুলি দূর করার প্রচেষ্টা দেখা দেয়। Weierstrass (1815-1897), Dedekind (1831-1916)[2] এবং Georg Cantor (1845-1918)[3] গণিতের অন্তর্নির্হিত অসঙ্গতিগুলি দূর করে গণিতকে বাস্তব সংখ্যা বিষয়ক তত্ত্বের উপর দাঁড় করান। উনবিংশ শতাব্দীর মধ্যভাগে গণিতের অন্তর্নির্হিত অসঙ্গতিগুলিকে দূর করা সম্ভব হলেও, গণিতের ভিত্তি সংক্রান্ত অনুসন্ধানের তাগিদ শুরু হয় উনবিংশ শতাব্দীর শেষভাগ থেকে

শুরু করে বিংশ শতাব্দীর প্রথম অর্ধের মধ্যে। গণিতের ভিত্তি সুদৃঢ় করণের ক্ষেত্রে মূলত তিনটি ভিত্তিবাদী প্রস্থান (fundamental school)[4] লক্ষ্য করা যায়। সেগুলি ছিলঃ

ক) Frege এবং Russell এর গণিতের যুক্তি-বৈজ্ঞানিকীকরণ তত্ত্ব (Logicism), যার মূল বক্তব্য ছিল গণিত মূলত যুক্তিবিজ্ঞানের একটি অংশ।

খ) Hilbert এর আকারকৈবল্যবাদ (Formalism), যার মূল বক্তব্য হল, গণিত হল অনারোপিত প্রতীক সমূহের বিন্যাসভিত্তিক পূর্বনির্দিষ্ট নিয়ম নিয়ন্ত্রিত ব্যবহার, এবং

গ) Browser এর স্বজ্ঞাবাদ (Intuitionism), যার মূল বক্তব্য হল, গণিত হল একটি মানসিক প্রক্রিয়া এবং গাণিতিক বস্তু সকল হল মানসিক কাঠামো।

যুক্তি-বৈজ্ঞানিকীকরণ তত্ত্বের মূল বক্তব্য হল এই যে, গণিত হল যুক্তিবিজ্ঞানের একটি অংশ এবং গাণিতিক জ্ঞানের নিশ্চয়তার মূলেই আছে কিছু মৌলিক যৌক্তিক সত্যের নিশ্চয়তা।[5] যুক্তি-বৈজ্ঞানিকীকরণ তত্ত্বের প্রবর্তক রূপে Frege এবং Russell দুটি ভিন্ন দিক থেকে গণিতের ভিত্তি অনুসন্ধানের কথা বলেছেন, প্রথমটি হল, গাণিতিক প্রত্যয়গুলিকে যৌক্তিক প্রত্যয়ের মাধ্যমে সংজ্ঞায়িত করা, অর্থাৎ প্রাত্যয়িক পর্যাবসান (Conceptual Reduction),[6] এবং দ্বিতীয়টি হল, গাণিতিক সত্যগুলিকে ঐ যৌক্তিক প্রত্যয় সম্বলিত কয়েকটি মৌল যৌক্তিক সত্য থেকে নিষ্কাষণ করা অর্থাৎ গাণিতিক সত্যগুলিকে ঐ যৌক্তিক সত্য রূপে দেখানো, যাকে বলা হয় তাত্ত্বিক পর্যাবসান (Doctrinal Reduction)।[7]

গাণিতিক সত্যের ভিত্তি অনুসন্ধানের ক্ষেত্রে সন্দেহের অতীত সত্যের অমোঘ আকর্ষণে বিভিন্ন সময়ে বদলেছে দার্শনিক চিন্তার পথ, Russell যার পরিচিত দৃষ্টান্ত। দৃঢ় বাস্তববোধ এবং দৃঢ়তর যুক্তির খোঁজে বার বার তিনি তার দার্শনিক অবস্থান বদলেছেন। অপরিবর্তিত থেকে গেছে শুধুমাত্র মূল লক্ষ্য - কীভাবে গণিতকে যুক্তিবিজ্ঞানের অংশ হিসাবে প্রদর্শন করে গণিতের সংগতি প্রমাণের মাধ্যমে গণিতকে সুদৃঢ় ভিত্তির উপর প্রতিষ্ঠা করা যায়। এটাই গণিতের যুক্তি-বৈজ্ঞানিকীকরণতত্ত্ব।[8] যদিও এই তত্ত্বের প্রধান উদ্যোক্তা Frege, তবুও Russell-এর হাত ধরেই তা ব্যাখ্যাত ও আকারিত হয়। Russell-এর অনুসরণে যুক্তি-বৈজ্ঞানিকীকরণতত্ত্ব বুঝতে হলে আমাদের প্রথমেই বুঝতে হবে, গণিতের ভিত্তি সুদৃঢ়করণের প্রচেষ্টা কেন এবং কিভাবে শুরু হয়েছিল?

গাণিতের ভিত্তি সুদৃঢ়করণের ক্ষেত্রে Russell এর মূল প্রেক্ষিত ছিল Peano এর গাণিতিক যুক্তিবিদ্যা। 1900 খ্রীষ্টাব্দে Paris - এ অনুষ্ঠিত International Philosophical Congress - এ Russell এর সাথে Peano এর সাক্ষাৎ হয়।[9] International Congress -এ peano তাঁর বক্তৃতায় এটা দেখাতে সমর্থ হন যে, সমগ্র পাটিগণিতকে তিনটি মৌল প্রত্যয় এবং পাঁচটি মৌলবাক্যের (Axiom) দ্বারা ব্যাখ্যা করা সম্ভব। Peano এর বক্তৃতায় উদ্বুদ্ধ হয়ে Russell এইসময় Peano এর সমস্ত লেখা পড়তে উদ্যোগী হন। Russell মনে করেন, Peano-র এই মূল প্রত্যয়গুলিকে যৌক্তিকভাবে মৌল শ্রেণীর ধারণার সাহায্যে ব্যাখ্যা করা সম্ভব। তিনি আবিষ্কার করেন যে, যদি এমন একটি স্বতঃসিদ্ধভিত্তিক তন্ত্র (Axiomatic System) গঠন করা যায়, যার কেন্দ্রীয় প্রত্যয় হবে শ্রেণী (Class) এবং যদি ঐ তন্ত্রে Peano-র মৌল প্রত্যয় তিনটি সংজ্ঞেয় হয় এবং মৌলবাক্য পাঁচটি প্রদর্শনযোগ্য (demonstrable) হয়, তাহলে পাটিগণিতায়িত গণিতকে— যুক্তিবিজ্ঞানের অংশ হিসাবে ব্যাখ্যা করা সম্ভব হবে। বস্তুতঃ এই লক্ষ্যেই Russell 1901 খ্রীষ্টাব্দে "The Logic of Relations" নামক একটি প্রবন্ধ লেখেন, আর যেখানে তিনি Peano-এর Notation ব্যবহার করে একটি সম্বন্ধসূচক আকরিক তত্ত্ব (the formal theory of relations) গঠন করেন। এই formal theory of relations, Russell তাঁর theory of Series এ প্রয়োগ করেন, যেটি Russell এর যুক্তি-বৈজ্ঞানিকীকরণ প্রকল্পের এক গুরুত্বপূর্ণ অংশ। অবশ্য কিছুদিনের মধ্যেই Russell অনুধাবন করলেন যে, এই বিষয়ে অন্য এক সমস্যার সৃষ্টি হতে

পারে। সমস্যা হল, জ্ঞান বলতে যদি বাচনিক জ্ঞান বোঝায় তাহলে যে ভাষায় গাণিতিক প্রত্যয়গুলিকে সংজ্ঞায়িত করা হবে সেই ভাষাকে স্পষ্ট এবং আনবিক (Atomic) হতে হবে। মূলতঃ সেই ভাষার বিশ্লেষণ সর্বাগ্রে প্রয়োজন। আর এই লক্ষ্যেই Russell 1903 খ্রীষ্টাব্দে লেখা 'The Principle of Mathematics' গ্রন্থটিতে বাচকতা বিশিষ্ট প্রত্যয় তত্ত্বের সাহায্যে (The theory of Denoting Concept)[10] এই কাজটি সম্পন্ন করেন। সেই কারণে The Principle of Mathematics কে Russell এর যুক্তি-বৈজ্ঞানিকীকরণের প্রাথমিক পর্যায় বলা যায়। Russell এর এই প্রকল্প রূপায়ণের পথে এক অন্যতম আবিষ্কার হল 1905 খ্রীষ্টাব্দে প্রকাশিত On Denoting নামক প্রবন্ধ।[11] এই প্রবন্ধে Russell এর মূল আলোচনার বিষয় ছিল এটা দেখানো যে, দৈনন্দিন ভাষার ব্যাকরণ সম্মত আকার (Gramatical Form) এবং যৌক্তিক আকার (Logical form)-ভিন্ন। এইসময় 1906 খ্রীষ্টাব্দে Russell অন্য একটি প্রবন্ধ "On Insolubilia and their Solution by Symbolic Logic" লেখেন। এই প্রবন্ধটিতে Russell মূলত নিবেশন বা প্রতিস্থাপন মূলক তত্ত্বের (Substitutional Theory) পরিকাঠামোই বর্ণনা তত্ত্বের (Theory of Description) বিশ্লেষণ পদ্ধতি প্রয়োগ করে তাঁর গাণিতিক যুক্তিবিজ্ঞানের পথকে প্রশস্ত করার চেষ্টা করেন।

Russell এর যুক্তি-বৈজ্ঞানিকীকরণ প্রকল্প সাকারায়ণের অন্যতম পর্যায় হল (1910-1913) এই দীর্ঘ তিন বছর সময় ধরে তিনটি পৃথক খণ্ডে লিখিত Principia Mathematica গ্রন্থটি। বলা হয়ে থাকে যে, Russell এর কাছে যুক্তিবিদ্যা দর্শনচর্চার পদ্ধতি— এটা যেমন সত্য, ঠিক তেমনই Principia Mathematica হল ঐ যুক্তিবাদী দর্শনচর্চার প্রাণকেন্দ্র। আলোচ্য প্রকরণে আমার মূল আলোচ্য বিষয় হল Russell অনুসরণে Principia Mathematica গ্রন্থটির মূল্যায়ন ভিত্তিক সংক্ষিপ্ত এবং আমার একান্ত নিজস্ব বোধমূলক আলোচনা করা।

এখন আমরা Russell কৃত Principia Mathematica গ্রন্থটির সার্বিক আলোচনার মূল্যায়ন করব। তিনটি পৃথক খণ্ডে লিখিত গ্রন্থটি Russell এবং তাঁর অভিন্ন শিক্ষকবন্ধু Whitehead যেভাবে পর্যালোচনা করেছেন তাতে তিনটি পৃথক অংশ পরিলক্ষিত হয়। এই তিনটি পৃথক অংশ হল:

ক) অবরোহণ তন্ত্র (System of Deduction)

খ) যৌক্তিক পর্যায় তত্ত্ব (Theory of Logical Types) এবং

গ) অসম্পূর্ণতার প্রতীক তত্ত্ব (Theory of Incomplete Symbols)

Principia Mathematica গ্রন্থটিতে Russell এবং Whitehead অবরোহণতন্ত্রকে যেভাবে আলোচনা করেছেন তা মূলত এক প্রকার Axiomatic System।[12] Axiomatic System বলতে বোঝানো হয়েছে একপ্রকার স্বতঃসিদ্ধভিত্তিক তন্ত্রকে। এইরূপ তন্ত্র গঠিত হয় কতকগুলি স্বতঃসিদ্ধভিত্তিক উপকরণের দ্বারা। এই উপকরণের অন্যতম হল:

১। প্রতীকের বর্ণমালা, (like - propositional variables, Monadic and Dyadic operators and Brackets) যা দিয়ে সেই তন্ত্রটির বাক্যশৃঙ্খল গঠিত হয়, যেমন p,q,r,~,v ইত্যাদি অধিতান্ত্রিক প্রতীক (metalogical symbols)

২। সুগঠিত বাক্য (well formed formula) এবং ঐ সুগঠিত বাক্য গঠনের নিয়ম (formation rule)

৩। কতকগুলি স্বতঃসিদ্ধ মৌলবাক্য (Axiom)।

Russell এবং Whitehead এর ব্যাখ্যা অনুসারে এই পদ্ধতির মূল লক্ষ্য হল সকল তন্ত্রবাক্য (theorem) কে অবরোহী সম্বন্ধে সুবিন্যস্তকরণ।[13] বিশুদ্ধ যুক্তিবিজ্ঞান রচনার জন্য এই তন্ত্র আবশ্যিক। গ্রন্থটিতে Russell মূলত শ্রেণীর (Class) এর ধারণার সাহায্যে সংখ্যাতত্ত্ব (theory of numbers) কে ব্যাখ্যা করেছেন, যেমন ২ সংখ্যাটি হল সকল যুগ্মের শ্রেণীর (Class of all couples) শ্রেণী। Russell শ্রেণী নামকে (class names) বর্ণনার মতো অসম্পূর্ণ প্রতীক (Incomplete Symbol) হিসাবে চিহ্নিত করেছেন এবং এর প্রয়োগঘটিত সংজ্ঞা দিয়েছেন (Definition in Use)। এই প্রয়োগঘটিত সংজ্ঞা দিতে গিয়ে Russell এবং Whitehead, Principia Mathematica তে যে যৌক্তিক বিশ্লেষণ পদ্ধতির সাহায্য নিয়েছেন (Logic of Propositional Function) তাকে অনেকেই উচ্চতর পর্যায়ের বিধেয় যুক্তিবিজ্ঞান (Higher Order Predicate Logic) বলে মনে করেন।[14]

Principia Mathematica তে Russell যে অবরোহণ তন্ত্র গঠন করেছেন তার সমস্তই প্রসক্তির (entailment) ধারণার কোন না কোন একটি বিশ্লেষণের উপর প্রতিষ্ঠিত। প্রসক্তি বা প্রতিপত্তি সম্বন্ধের মূল স্বরূপগত ধর্মই হল এই যে, সত্য বচন দ্বারা প্রসক্ত বচন সর্বদা সত্যই হয়। যেমন p যদি সত্য হয় এবং p যদি q কে প্রসক্ত করে তাহলে q সর্বদা সত্যই হয় বা এমন হতে পারে না যে, যদি p,q কে প্রসক্ত করে তাহলে p সত্য এবং q মিথ্যা। শুধু তাই নয়— এই গ্রন্থে Russell এটা দেখানোর চেষ্টা করেছেন, প্রসক্তির (entailment) ধারণাকে বস্তুগত প্রতিপত্তির ধারণার (material implication) দ্বারা বুঝতে হলে অনিবার্যভাবে বিভিন্ন কূটভাস (paradox) এর সম্মুখীন হতে হচ্ছে। প্রসক্তি (entailment) সম্পর্কে আমাদের স্বাভাবিক যে ধারণা আছে তাতে যে বচন প্রসক্ত করে এবং তার সঙ্গে যে বচন প্রসক্ত হয়— সেক্ষেত্রে আমরা কোন এক প্রকারের সম্পর্ক (connection) প্রত্যাশা করি। কিন্তু মনে রাখতে হবে যে বস্তুগত প্রতিপত্তি সত্যাপেক্ষ যোজক হওয়ায় দুটি বচনের বস্তুগত প্রতিপত্তির ক্ষেত্রে বচন দুটির সত্যমূল্যের অতিরিক্ত কিছু বিবেচনা করার কোন প্রশ্নই ওঠে না। আর তাই বস্তুগত প্রতিপত্তিকে প্রসক্তি সম্বন্ধ রূপে দেখলে তা স্বাভাবিক বোধের পরিপন্থী হবে, পরিপূরক হবে না।

এটা স্পষ্টতই বোধগম্য যে, প্রসক্তির ধারণার একটি অন্যতম উপাদান হল অনিবার্যতার ধারণা (The concept of necessity)। যখন বলা হয় p,q কে প্রসক্ত করে (p entails q), তখন একথাই বলতে চাওয়া হয় যে p সত্য হলে q সত্য না হয়ে পারে না। কিংবা বলা হয়, এটা অনিবার্য যে — যদি p সত্য হয় তাহলে q সত্য হবেই। অর্থাৎ p এবং q এর মধ্যে প্রসক্তি সম্বন্ধে আছে— একথা বলার অর্থই হল— এটা অনিবার্য যে p entails q. প্রসঙ্গত বলা প্রয়োজন যে, এই অনিবার্যতা একটি (necessity) মাত্রিক প্রত্যয় (modal concept), এটি বচনের ধর্মকে নির্দেশ করে না, এগুলি বাচনিক অপেক্ষকের (propositional function) ধর্ম।[15] যখন কোন বচনকে অনিবার্যভাবে সত্য বলা হয় তখন আসলে বলতে চাওয়া হয় যে ঐ বচনটি যে বাচনিক অপেক্ষকের প্রতিস্থাপন দৃষ্টান্ত সেই বাচনিক অপেক্ষকটি অনিবার্য। যেমন a=a এই বচনটি অনিবার্য, যেহেতু এটি x=x এই বাচনিক অপেক্ষকের প্রতিস্থাপন দৃষ্টান্ত। বাচনিক অপেক্ষকের অনিবার্যতা বলতে বোঝায় বাচনিক অপেক্ষকটি তার অন্তর্গত ব্যক্তিগ্রাহকের সকল মানের জন্য সত্য। যেমন x=x অনিবার্যভাবে সত্য বলতে বোঝায় (x) (x=x) বচনটি সত্য। অনিবার্যতার এইরূপ একটি ব্যাখ্যার পরিপ্রেক্ষিতে বলা যেতে পারে যে p entails q -এই প্রতিপত্তিসূচক বচনটি অনিবার্য হবে যদি এবং কেবল যদি এটি যে বস্তুগত প্রতিপত্তি সূচক বাচনিক অপেক্ষকের প্রতিস্থাপন দৃষ্টান্ত (Substitution instance of a material implicative propositional function), সেই বাচনিক অপেক্ষকটি তার অন্তর্গত ব্যক্তি গ্রাহকের সকল মানের জন্য সত্য হয় বা বলা যেতে পারে যে, বাচনিক অপেক্ষকটির প্রতিটি প্রতিস্থাপনের দৃষ্টান্তই সত্য হয়। এই প্রেক্ষিতে প্রসক্তির (entailment) সংজ্ঞা দিতে গিয়ে বলা যেতে পারে যে, p,q কে প্রসক্ত করবে যদি এবং কেবল যদি p entails q -এই বস্তুগত প্রতিপত্তিসূচক বচনটি একটি এমন বস্তুগত প্রতিপত্তি সূচক বাচনিক অপেক্ষকের প্রতিস্থাপন দৃষ্টান্ত হয়, যার সার্বিক মানকিত আকারটি হবে সত্য।

প্রসঙ্গত বলা প্রয়োজন, Principia Mathematica গ্রন্থে Russell প্রসক্তির ধারণাটিকে আকারগত প্রতিপত্তির (formal implication) ধারণায় পর্যবসিত করেছেন। আকারগত প্রতিপত্তির ধারণার সাহায্যে প্রসক্তির সংজ্ঞা প্রদানের মাধ্যমে Russell স্পষ্টতই প্রসক্তি সম্বন্ধের অন্তর্গত অনিবার্যতাকে ধরার চেষ্টা করেছেন। Russell তাঁর অভিজ্ঞতাবাদী দার্শনিক অবস্থান থেকে অনিবার্যতাকে সার্বিকতার (Universal) মাধ্যমে বুঝতে চেয়েছেন। আসলে Russell এবং Whitehead খুব সচেতনভাবেই

সত্যাপেক্ষ বাচনিক যুক্তিবিজ্ঞানের অন্তর্গত সত্যাপেক্ষ যোজককে বস্তুগত প্রতিপত্তির ধারণার মাধ্যমে, কিংবা প্রথম স্তরের মানকতত্ত্বের আকারগত প্রতিপত্তির মাধ্যমে, প্রসক্তির সংজ্ঞা দিয়েছেন। সত্যাপেক্ষ বাচনিক যুক্তিবিজ্ঞান বা প্রথম স্তরের মানকতত্ত্ব হল ব্যাপনামুখী যুক্তিবিজ্ঞান (extensional logic).[16] Russell সম্পূর্ণভাবে ব্যাপনামুখী একটি যৌক্তিক তন্ত্রের মাধ্যমে প্রসক্তির সংজ্ঞা দিতে চেয়েছিলেন, যে যুক্তিবিজ্ঞানে অনিবার্যতা, (Necessity) সম্ভবপরতা (Possibility) — ইত্যাদি অ-ব্যাপনামুখী (non-extensional) মাত্রিক প্রত্যয়ের কোন প্রাসঙ্গিকতা থাকবে না।

আসলে এতগুলো কথা বলার মূলেই হল অভিজ্ঞতাবাদীরূপে Russell এর অবস্থান এবং তাঁর জ্ঞানতাত্ত্বিক আলোচনার প্রেক্ষিতকে স্পষ্ট করা। Principia Mathematica গ্রন্থে PM তন্ত্র (System) উপস্থাপনের অন্যতম উদ্দেশ্য ছিল এটা দেখানো যে, গাণিতিক সত্যগুলিকে কেবলমাত্র যুক্তিবিজ্ঞানের মৌলবাক্য (Axiom) থেকেই প্রমাণ করা যায়। গাণিতিক প্রত্যয়গুলি মূলত ব্যাপনামুখী (extensional) হওয়ায় গণিতের ভিত্তিরূপে একটি ব্যাপনামুখী যুক্তিবিজ্ঞানকেই তিনি যথেষ্ট বলে মনে করেছেন। বস্তুগত প্রতিপত্তি, প্রসক্তি সম্বন্ধের যথাযথ স্বরূপকে সম্পূর্ণভাবে প্রকাশ করতে না পারলেও, এক বা একাধিক যৌক্তিক বাক্য থেকে একটি গাণিতিক উপপাদ্যকে অবরোহনের ক্ষেত্রে প্রসক্তি সম্বন্ধের কাছে ন্যূনতম যে চাহিদা, তা বস্তুগত প্রতিপত্তির দ্বারা পূর্ণ হয়ে যায় বলে Russell মনে করেছেন।

Principia Mathematica তে অবরোহণ তন্ত্র (Deductive System) বিষয়ে আলোচনা করার পর Russell এবং Whitehead, যৌক্তিক পর্যায়তত্ত্ব (theory of logical types) নিয়ে বিস্তারিত আলোচনা করেছেন। গণিতকে যুক্তিবিজ্ঞানে পর্যবসিত করার ক্ষেত্রে Russell পূর্ববর্তী Frege যে সকল পরিকল্পনা গ্রহণ করেছিলেন, Russell যৌক্তিক পর্যায়তত্ত্বের (theory of types) অবতারণা করেন। এই পর্যায়তত্ত্বকে Russell দুটি ভাগে বিভক্ত করে আলোচনা করেন। যার প্রথমটি হল ঋজু পর্যায়তত্ত্ব (simple theory of types) এবং শাখা-প্রশাখায়িত পর্যায়তত্ত্ব (remified theory of types)[17]

ঋজু পর্যায়তত্ত্ব অনুসারে শ্রেণী (Class), ধর্ম (property) এবং সম্বন্ধ (relation) - এই তিনটিকে বিভিন্ন যৌক্তিক পর্যায়ে ভাগ করতে হবে। বস্তু/ব্যক্তিকে সর্বনিম্ন স্তরে রেখে বিভিন্ন যৌক্তিক পর্যায়ের উর্দ্ধগোত্রানুক্রমে (hierarchy) গঠন করতে হবে। এই গোত্রানুক্রমের সর্বনিম্ন ধাপে অবস্থিত যাবতীয় বস্তু তথা ব্যক্তির পর্যায় হল 0 (zero), এর উপরের ধাপের যৌক্তিক পর্যায় হল ব্যক্তিবিশেষের সমষ্টি নিয়ে গঠিত শ্রেণী, যার পর্যায় হল ১। পরবর্তী ধাপে থাকবে ব্যক্তি বিশেষের সমষ্টিরূপে গঠিত পর্যায় ১ শ্রেণীর শ্রেণী - যার পর্যায় হল ২। একই রকমভাবে তার উপরের ধাপে থাকবে পর্যায় ৩ এর শ্রেণী এবং এইভাবে ক্রমান্বয়ে চলতে থাকবে। প্রসঙ্গত বলা ভালো পর্যায়ের এই ক্রম কেবলমাত্র যে শ্রেণীর (class) ক্ষেত্রেই খাটবে তাই নয়, এটি ধর্ম এবং সম্বন্ধের বেলাতেও খাটবে। এইরূপ পর্যায় তত্ত্বের সাহায্যে বিভিন্ন যৌক্তিক কূটাভাসের সমাধান সম্ভব। যেমন যদি বলা হয়, একটি শ্রেণী তার নিজের শ্রেণীর সভ্য এবং একটি শ্রেণী নিজে নিজের শ্রেণীর সভ্য নয় - তাহলে এইরূপ বাক্য দুটিই হবে অর্থহীন। R is the member of R ($R \in R$) এবং R is the not mamber of R-এই জাতীয় বাক্য দুটিই অর্থহীন। কেননা শ্রেণীর সভ্য (member) হওয়ার সম্বন্ধ অর্থবহ হতে পারে কেবল যদি শ্রেণী এবং শ্রেণীর অন্তর্গত সভ্যের যৌক্তিক পর্যায় ভিন্ন হয়। সভ্য যে শ্রেণীর অন্তর্গত, তার যৌক্তিক পর্যায়ের এক ধাপ উপরে থাকবে। এই জাতীয় কূটাভাসের সমাধান করা ছাড়াও ঋজু পর্যায়তত্ত্ব দিয়ে অনির্দেশ্য বা অপ্রত্যাশিত কূটাভাস (impredicable paradox) এরও সমাধান পাওয়া যায়।

Russell ঋজু পর্যায়তত্ত্বের আলোচনা করার পর বাচ্য সংক্রান্ত কূটাভাসের (Semantic Paradox) সমাধান করার জন্য শাখা-প্রশাখায়িত পর্যায়তত্ত্বের আলোচনা করেছেন। শাখা-প্রশাখায়িত পর্যায়তত্ত্বের দ্বারা Russell Semantic Paradox গুলির মধ্যে মূলত মিথ্যাবাদী কূটাভাস অনুবাদ (Liar Paradox) এর সমাধান করেছেন। এই তত্ত্ব অনুসারে একই পর্যায় সম্পর্কে যেসব বিধেয় প্রয়োগ করা হয় সেগুলি সব একই স্তরের নয়। Russell এর মতে আমরা কোন প্রদত্ত পর্যায়ের সব অপেক্ষক বা ধর্ম

সম্পর্কে সংগতভাবে একথা বলতে পারি না, সব বচন নির্দেশ করতে পারি না। আমরা অর্থবহ উক্তি করতে পারি কেবল কোন পর্যায়ের প্রথম পর্বের অপেক্ষক (first order function) সম্পর্কে, অথবা কোন প্রদত্ত পর্যায়ের দ্বিতীয় পর্বের অপেক্ষক (second order function) সম্পর্কে, আর উক্তি করা যায় নির্দিষ্ট বর্গের সব বচন সম্বন্ধে। কোন বচনই স্বনির্দেশক হতে পারে না, কাজেই মিথ্যাবাদী কূটভাস (liar paradox) এর ক্ষেত্রে যে বচনগুলি উল্লেখ করা হয় সেগুলি অর্থহীন। এই কূটভাসের উৎস হল বচনের মধ্যে পর্বের পার্থক্য করতে না পারা।

এটা উল্লেখ করতে বাধ্য হচ্ছি যে আলোচনা সংক্ষিপ্তকরণের জন্য Principia র অন্তর্গত তিনটি বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ আলোচনার মধ্যে তৃতীয় তথা সর্বশেষ আলোচনা অর্থাৎ অসম্পূর্ণতার প্রতীকতত্ত্ব (Theory of Incomplete Symbols) বিষয়ক আলোচনাকে আমি মূল আলোচনা থেকে বাদ দিচ্ছি।

যাইহোক পরিশেষে এটা অকপটে স্বীকার করছি যে Principia Mathematica গ্রন্থটিকে সংক্ষিপ্তকরণ বা মূল্যায়ন করার ধৃষ্টতা বা জ্ঞাততা এর কোনোটাই আমার নেই। কেবল এক অর্বাচীন ছাত্ররূপে Principia গ্রন্থটি পাঠ করে নিজের ভাবনাচিন্তা গুলিকে একত্রিত করার চেষ্টা করেছি মাত্র।

Russell এবং Whitehead কৃত গণিতের যুক্তি-বৈজ্ঞানিকীকরণের কর্মসূচী কতটা সঙ্গতিপূর্ণ (Consistency) কতটা পূর্ণ (complete) এবং কতটা বাস্তব— তা নিয়ে প্রশ্ন তোলাই যায়, কিন্তু গণিত নিয়ে, গাণিতিক সংখ্যা নিয়ে, গাণিতিক সত্তার স্বরূপ নিয়ে— গাণিতিক যুক্তি-বৈজ্ঞানিকীকরণের এই আলোচনা বর্তমান শতাব্দীর সকল পাঠকের কাছে এক প্রেরণা, ভাবাবেগ। Peano এবং Frege এর হাত ধরে যে গাণিতিক যুক্তিবিজ্ঞানের আত্মপ্রকাশ ঘটেছিল তাকে আধুনিকতার যে সর্বোচ্চ শিখরে Russell এবং Whitehead পৌঁছে দিয়েছিলেন— তা অকল্পনীয় ছিল। আকারনিষ্ঠ মৌলবাক্য নির্ভর যৌক্তিক অবরোহণতন্ত্রের (formal axiomatic deductive systems) মাধ্যমে যুক্তিবিজ্ঞানকে উপস্থাপন করার যে ধরণ তার অনেকটাই Principia-র অবদান। Principia র প্রথম খণ্ডে গণিতের ভিত্তিরূপে যে যৌক্তিক তন্ত্রের উপস্থাপন ঘটেছে, সেখান থেকেই আধুনিক বিধেয় যুক্তিবিজ্ঞানের (predicate logic) আত্মপ্রকাশ- একথা নিঃসন্দেহে বলা যায়। বর্তমান যুক্তিবিজ্ঞানের একাধিক গুরুত্বপূর্ণ ধারণা যেমন— যৌক্তিক প্রত্যয়ের ব্যাপনমুখী এবং দ্যোতনামুখী প্রসঙ্গ, যোগ্যতা পূরণের ধারণা (satisfaction), সত্যমূল্য নির্ভর বাচ্যার্থতত্ত্ব (Truth value analysis), যৌক্তিক নিঃসৃতির ধারণা (logical consequence), বাচনিক আপেক্ষক (propositional function) এর ধারণা— এই সবেরই আঁতুরঘর হল Principia Mathematica গ্রন্থটি। অধিযুক্তিবিজ্ঞানের (meta logic) বিভিন্ন যৌক্তিক তন্ত্র, এবং তার বিভিন্ন প্রকার, এবং অধিতাত্ত্বিক (meta logical theory) আলোচনার হোতা যদি David Hilbert হন তাহলে এটা মানতে হবে যে, এই জাতীয় আলোচনার গুরুত্বকে প্রাধান্য পূর্বক অধিযুক্তিবিজ্ঞানকে যুক্তিবিজ্ঞানের মূল স্রোতে নিয়ে আসার হোতা অবশ্যই Bertrand Russell. Principia Mathematica তে উপস্থাপিত অসম্পূর্ণতার প্রতীক তত্ত্বের মাধ্যমে ভাষা বিশ্লেষণের যে পদ্ধতি প্রচলিত হয়েছে তার সাহায্যে মৌল প্রতীকের দ্বারা এমন একটি বিজ্ঞানসম্মত ভাষা তৈরি করে নেওয়া সম্ভব যার সাহায্যে ভাষার তাত্ত্বিক দায়বদ্ধতাকে যথা সম্ভব লঘু করা যাবে। আর এই বিশেষ বিশ্লেষণের ফলশ্রুতি স্বরূপ অস্তিত্বকে বস্তু আরোপিত ধর্মরূপে বিবেচনা না করে, বাচনিক অপক্ষকের (propositional function) ধর্মরূপে বিবেচনা করা সম্ভব হবে।

Notes and References

1. "Three fundamental notions in Mathematics - Infinity, the infinitesimals and continuity seemed inherently paradoxical. The paradox of infinity and continuity has been known since antiquity, but they acquire a new importance as the power of mathematics to represent continuous and infinite sequence grew. Both take many forms. The form of the paradox of infinity that especially worried Leibniz is - even numbers are only a part, a half of the whole realm of whole numbers and yet, to every whole numbers we can assign a corresponding even number." Heath, T.L.: *History of Greek Mathematics,* Dover Publication, New York, 1981, p.169.
2. Dedekind, R: *Essay on The Theorsy of Numbers,* Open Court Publication, Chicago, 1901, pp. 16-31.
3. Cantor, G. : *Contributions to the Founding of the theory of Transfinite Numbers,* Dover Publication, New York, 1915, p.17.
4. Heath, T.L: *History of Greek Mathematics,* Dover Publication, New York, 1921, p.173.
5. Russell, B: "The Logic of Relations with Some Applications to the Theory of Series", in his *Logic and Knowledge,* R.C. Marsh(ed.), Rutledge, London, 1901, p.201
6. Quine, W.V.O: "Epistemology Naturalized" *Ontological Relativity and Other Essays,* Columbia University Press, New York, 1969. pp. 69-90.
7. Russell, B: "The Logic of Relations with Some Applications to the Theory of Series", in his *Logic and Knowledge,* R.C. Marsh (ed.), Rutledge, London, 1901, p.203
8. Peano, G: *Foundations of Analysis*, University of Toronto, Press, Toronto, 1910, p.91
9. Russell's immediate starting point is the mathematical logic of Peano whom Russell meets at the International Congress of Philosophy in Paris in 1900. Peano is able to show that the whole of arithmetic can be founded upon a system that uses only three basic notions : zero, number and successor and five basic axioms.
10. Russell, B: *The Principles of Mathematics,* Cambridge University Press, London, 1903, pp. 251-306.
11. Russell, B: *On Denoting,* Rutledge, London, 1905, p.4
12. Russell, B and Whitehead, A.N: *Principia Mathematica,* Vol-1, Cambridge University Press, Cambridge, 1910-13, p. 44
13. Ibid. pp. 44-45.
14. Ibid. p. 55.
15. Ibid. Vol.-1, Chapter-iii, p. 72.
16. Ibid. Vol.-1, Chapter-iii, p. 87.
17. Ibid. Vol-1, Chapter - iii, p. 190